
Study and application of geometric concepts in the movement of a vehicle using cartesian coordinates

Estudo e aplicação de conceitos geométricos na movimentação de um veículo utilizando coordenadas do plano cartesiano

Received: 2023-15-04 | Accepted: 2023-20-05 | Published: 2023-31-05

Augusto Ost

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5699-1905>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: augusto.ost@ifpa.edu.br

Hugo Caike Cruz Neri

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1786-5663>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: hugocruzneri@gmail.com

André Afonso Silva Padilha

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7633-504X>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
Email: padilhaandre18@gmail.com

Paulo William Soares Rego

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4851-9816>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: paulowilliam64@gmail.com

Mauro Gomes da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9586-9715>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: mgsilva021@gmail.com

Marcelo Miranda Damasceno

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8748-7728>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: marcelo.damasceno@ifpa.edu.br

Gustavo Francesco de Moraes Dias

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7681-2318>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
E-mail: gustavo.dias@ifpa.edu.br

Alan Marcel Fernandes de Souza

Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1656-5714>
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, Brasil
Email: alan.marcel@ifpa.edu.br

ABSTRACT

Autonomous vehicles are already a reality in many contexts. Most of them need sensors to move around their environment, which increases the complexity and cost of the project. This study uses the coordinates of the Cartesian plane to orient a prototype vehicle in relation to its geographic space, allowing it to move to predefined coordinates without the use of any sensors. For the steering system of the prototype, concepts of point, line, and vectors were used. The initial position of the vehicle is represented by a vector, which informs its direction in the plane, having as final destination any point in the Cartesian system. From this information, a displacement vector is created, which leads the prototype to the reference point, and indicates the angle it must rotate. Regarding the direction of rotation, the concept of parallel lines between the

prototype's vector and the destination point was used, where the analysis of their y-intercept determines if the vehicle rotates to the left or right. So, with the use of vectors and the Cartesian plane, it was possible to determine fundamental information for the locomotion of the prototype, such as angle and direction of rotation, although there was some difficulty in determining the graphic location of the vector.

Keywords: Vector; Prototype; Coordinate; Angle; Analytic geometry;

RESUMO

Veículos autônomos são realidade em diversos contextos. A maioria precisa de sensores para se locomover pelo ambiente que estão inseridos, o que aumenta a complexidade e o custo do projeto. Este estudo utiliza as coordenadas do plano cartesiano para a orientação de um protótipo de veículo em relação ao seu espaço geográfico, de forma que possa deslocar-se para coordenadas pré-definidas sem o uso de sensores. Para o sistema de direção do protótipo, foram utilizados conceitos de ponto, reta e vetores. A posição inicial do veículo é representada por um vetor, que informa sua direção e sentido dentro do plano, tendo como destino final outro ponto qualquer. A partir dessas informações, é criado um vetor deslocamento, que o encaminha até o ponto de referência, e indica o ângulo deve rotacionar. Em relação ao sentido de rotação, utilizou-se o conceito de retas paralelas entre o vetor do protótipo e o ponto de destino, onde a análise dos coeficientes lineares determina se o veículo rotaciona para a esquerda ou direita. Assim, com o uso de vetores e do plano cartesiano, foi possível determinar informações fundamentais para a locomoção do protótipo, como ângulo e sentido de rotação, embora tenha havido certa dificuldade para determinar a localização gráfica do vetor.

Palavras-chave: Vetor; Protótipo; Coordenada; Ângulo; Geometria analítica;

INTRODUÇÃO

A escola está inserida na sociedade, de forma que deve buscar uma interação com as novas tecnologias e a possibilidade da aplicação de conceitos estudados pelos discentes na construção de protótipos, projetos de pesquisa e elaboração de soluções para problemas enfrentados. A inserção de propostas de educação tecnológica nas escolas vem com o propósito de instigar o interesse do discente e torná-lo protagonista de sua aprendizagem. Nessa perspectiva, Moran (2004, p. 20-21) afirma que “a Internet e as novas tecnologias estão trazendo novos desafios pedagógicos para as universidades e escolas. Os professores, em qualquer curso presencial, precisam aprender a gerenciar vários espaços e a integrá-los de forma aberta, equilibrada e inovadora”. Dessa forma, busca-se uma união entre os conceitos matemáticos e sua aplicação em algo concreto, utilizando novas ferramentas e desenvolvendo uma aprendizagem significativa.

Nesse aspecto, a Matemática da sala de aula muitas vezes parece desconectada da realidade, principalmente ao abordar conceitos geométricos, que são tratados de maneira puramente teórica. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta as competências que devem ser desenvolvidas pelos discentes ao estudar a Geometria:

“A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2017, p.269).

A Geometria é uma importante ferramenta no desenvolvimento da capacidade do estudante de resolver problemas e desenvolver o raciocínio lógico dedutivo. Aliado a isso, a robótica educacional tem um papel relevante no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando a aplicação de conceitos na resolução de problemas, conforme apresentado por Barbosa *et al.* (2018, p. 2):

“A utilização da robótica tem possibilitado melhorias no processo educativo, tanto em conteúdos técnicos voltados a programação, como no aproveitamento de outras disciplinas como a matemática, podendo estimular a capacidade de elaborar hipóteses, estabelecer relações e descobrir novos caminhos na aplicação de conceitos adquiridos teoricamente.”

A utilização da robótica educacional possibilita um amplo campo de aplicação, entre eles a construção de veículos autônomos (De Azevedo & Maltempi, 2020; Santos *et al.*, 2020). A escolha da automação dos veículos terrestres como objeto de pesquisa está atrelada ao fato de que vem se tornando um campo de estudo cada vez mais significativo e atrativo (WEI, 2015). Cita-se como exemplo as pesquisas desenvolvidas pela *Waymon*, empresa subsidiária da *Alphabet Inc* e parte do mesmo grupo comercial do *Google*, que buscam a criação de carros autônomos para a locomoção nas estradas e cidades.

Os veículos autônomos oferecem vantagens ao se tratar da exploração e obtenção de informações em ambientes de difícil acesso ou que ofereçam riscos aos seres humanos, como regiões submarinas de grandes profundidades, áreas devastadas por acidentes ou catástrofes de grandes proporções, regiões afetadas por radiação, entre outros. Além disso, possibilitam a exploração e investigação de outros planetas (CORDEIRO *et al.*, 2013).

Diante do exposto, o objetivo deste artigo foi elaborar um estudo matemático, para que os conceitos encontrados sejam utilizados na programação de um veículo autônomo, possibilitando sua locomoção utilizando coordenadas cartesianas, sem o uso de sensores. A locomoção do veículo será feita utilizando conceitos matemáticos que envolvam o plano cartesiano, vetores e geometria analítica.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Plano cartesiano e a utilização de pontos como ferramenta para localização espacial

A localização de um ponto no plano cartesiano ocorre por meio de coordenadas. Para o plano cartesiano bidimensional, considera-se a ocorrência de dois eixos, x e y , perpendiculares entre si, denominados abscissas e ordenadas, respectivamente. Sobre o eixo x definimos a abscissa x_p . Sobre o eixo y determina-se a ordenada y_p . Traçando uma reta x' paralela ao eixo x e outra y' paralelo ao eixo y , o ponto de encontro P entre x' e y' , terá coordenadas $P(x_p, y_p)$, onde o ponto $O = (0,0)$ é a origem do sistema (IEZZI, 2013). Desta forma, qualquer lugar no plano, pode ter sua localização representada por meio de coordenadas. Assim, o veículo terá sua posição representada por um ponto no plano cartesiano e uma sequência ordenada de pontos irá determinar uma rota a ser percorrida. A origem do sistema será considerada como ponto inicial para sua movimentação.

Conceitos de equação da reta

Para determinar o sentido de rotação serão utilizados os conceitos de equação da reta, que é dada por:

$$r: y = ax + b \quad (1)$$

onde a é o coeficiente angular, b é o coeficiente linear e x e y são as coordenadas de um ponto pertencente a reta r .

Considerando que os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos pertencentes à mesma reta, o coeficiente angular da reta a qual eles pertencem é dado por:

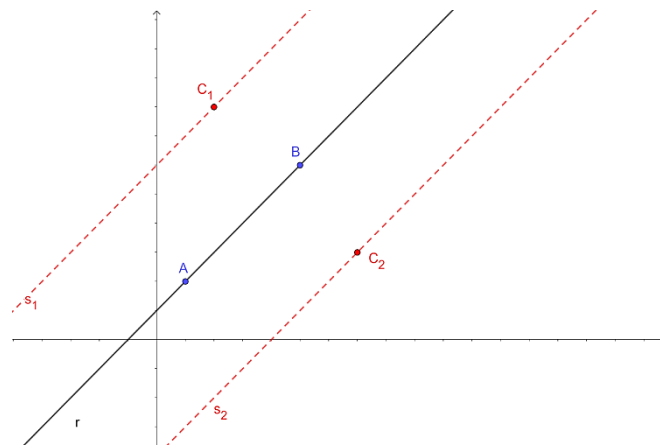
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (2)$$

Para o cálculo do coeficiente linear, isolando b na equação (1), resulta em

$$b = y - ax \quad (3)$$

Assim, utilizando um dos pontos, A ou B , e o valor do coeficiente angular, será possível calcular o coeficiente linear. Uma das características do coeficiente linear é que ele representa o ponto de intersecção entre a reta e o eixo y , pois para os casos onde $x = 0$, resulta em $y = b$.

Outro fato a ser considerado neste estudo é o conceito de retas paralelas. Segundo Winterle (2014, p. 2) “[...] retas paralelas possuem a mesma direção”, ou seja, possuem o mesmo coeficiente angular. Considere uma reta r que contém os pontos A e B e, uma reta s , paralela a r e que contenha o ponto C .

Figura 1 – Representação das retas r e s 

Fonte: Autor, 2023.

Note que a reta r terá um coeficiente b_r e ao calcular a reta s , ela terá outro coeficiente linear b_s . Fazendo a comparação entre b_s e b_r , pode-se determinar se a reta s estará abaixo ($b_s < b_r$) ou acima ($b_s > b_r$) de r . Tal fato será utilizado para determinar o sentido de rotação do veículo.

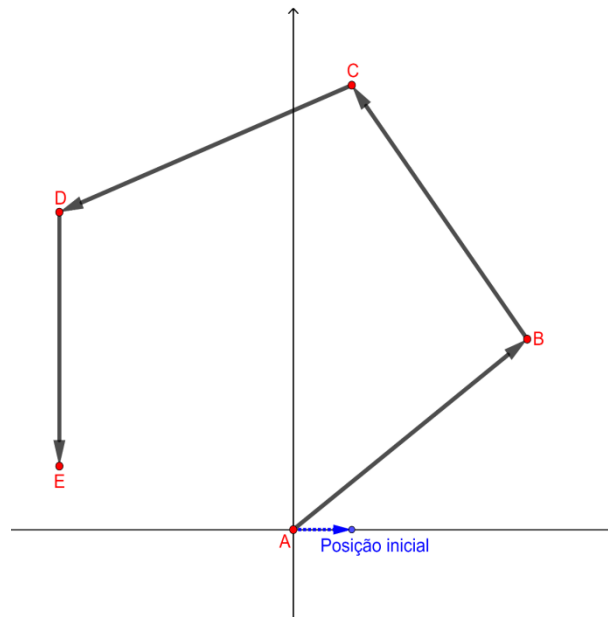
Conceitos de vetores

Seu surgimento se deu pelo físico italiano Galileu Galilei (1564-1642) a partir do seu pensamento referente a decomposição do movimento, os vetores são segmentos que possuem direção, sentido e módulo, podemos perceber sua aplicação em exemplos onde necessitamos não apenas do valor numérico ou em módulo, mas também de informações complementares bem como direção e sentido.

Dentre os exemplos que podemos observar de grandezas vetoriais destaca-se: velocidade, aceleração, força, deslocamento, empuxo, campo elétrico, Campo magnético, Força peso etc. Ao observar todos os exemplos podemos concluir que eles necessitam de informações que remete à direção, módulo e sentido.

A direção de um vetor pode ser definida com base no sistema de coordenadas selecionado. Usando um sistema cartesiano, as direções do espaço seriam x e y , e um vetor pode ser escrito como $\vec{v} = (x, y)$. A direção, por sua vez, está relacionada à seta na ponta do vetor, que o indica, podendo ser positivo ou negativo. O módulo irá representar o tamanho do vetor, ou seja a distância do seu ponto inicial até o ponto final.

Figura 2 – Exemplo de movimentação que pode ser realizada



Fonte: Autores, 2023.

O protótipo começa no ponto de origem do plano $(0,0)$, com sentido e direção do vetor $\vec{i} = (1,0)$ e, ao deslocar-se para outro ponto qualquer (x, y) , a movimentação que será realizada pode ser representada pela direção, sentido e módulo de um vetor. Por exemplo, o movimento do ponto A para o ponto B é representado pelo vetor \overrightarrow{AB} , na figura 2.

Nos demais movimentos será feita a troca dos pontos, gerando novos vetores. Para isso, serão considerados os pontos $A = (x_A, y_A)$ (onde o veículo estava), $B = (x_B, y_B)$ (para onde ele foi) e $C = (x_C, y_C)$ (para onde irá). O vetor \overrightarrow{AB} , representando a posição atual do veículo, e é dado por:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{4}$$

O vetor \overrightarrow{BC} , representa a direção e o sentido da nova movimentação que deverá ser realizada, sendo representado por:

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B) \tag{5}$$

Ao serem calculados os vetores da equação (4) e equação (5), sua representação terá como início a origem.

O ângulo de rotação será o ângulo entre os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} , que conforme Winterle (2014) é dado por:

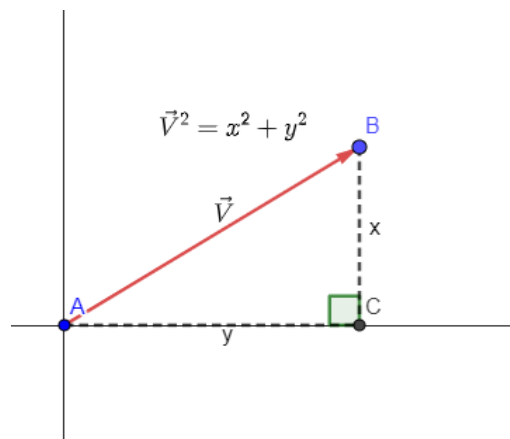
$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} \tag{6}$$

Aplicando a função inversa do cosseno, arccos, será obtido o valor de θ , utilizado na rotação do veículo. Após cada movimento será feita uma alternância dos pontos A, B e C, de forma que o ponto A irá receber as coordenadas de B, B recebe as coordenadas de C e C recebe as coordenadas do próximo ponto para onde o veículo irá, realizando de forma recorrente, até o último ponto.

Módulo

Para um vetor $\vec{V} = (x, y)$, é possível determinar o seu módulo com o uso do teorema de Pitágoras. Através dele tem-se:

Figura 3 – Decomposição de Vetor

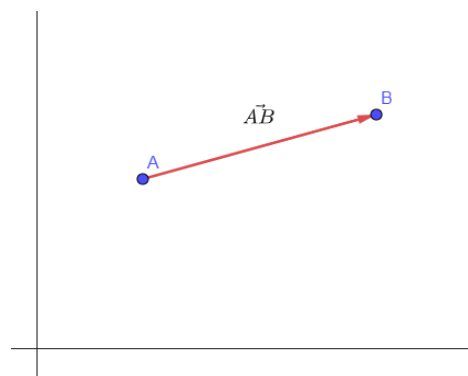


Fonte: Autores, 2023.

Com isso, $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ para o seguinte caso.

O módulo também pode ser determinado a partir da distância entre dois pontos. Por exemplo, no vetor AB a seguir tem-se que $d(A, B) = |AB|$.

Figura 4 – Vetor AB



Fonte: Autores, 2023.

Como $\overrightarrow{AB} = A - B = x_b - x_a, y_b - y_a$, conclui-se que: $d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

Produto escalar

Utilizando a definição de Winterle (2014), chama-se produto escalar de dois vetores $u = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $v = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ao número real $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

MATERIAIS E MÉTODOS

O trabalho foi desenvolvido tomando como ideia central a movimentação do veículo, em relação ao sentido e ângulo de rotação, de modo que sempre buscava-se a construção e refinamento dos métodos utilizados, expandido o resultado obtidos, buscando diminuir as limitações do projeto. A utilização de softwares, como o GeoGebra¹, possibilitou a visualização do problema e a verificação dos resultados obtidos. Cabe salientar que a movimentação do veículo deverá ocorrer sem o uso de sensores, sendo os conceitos e cálculos matemáticos responsáveis por determinar sua rotação. Foi utilizado o Tinkercad² e suas ferramentas para simular os resultados obtidos com o código que será executado posteriormente na construção do veículo.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Cálculo da eleição do sentido de rotação

Como qualquer instrumento locomotivo, espera-se que o protótipo busque sempre o menor caminho durante seu trajeto. Uma dessas escolhas refere-se ao sentido de rotação. Ao realizar o movimento o veículo poderá realizar três escolhas: virar para a esquerda, virar para a direita ou seguir em frente. Não foram considerados os casos onde o veículo irá se deslocar de ré.

Para determinar este sentido de rotação, deverão ser considerados o sentido e a direção do vetor que representa o deslocamento realizado, comparando com o posicionamento do ponto para onde o mesmo deve ir. Nessa análise foi considerado o vetor \overrightarrow{AB} , que representa o movimento anterior, e o ponto C , representando o próximo ponto para onde o veículo deve deslocar-se. Assim, para determinar o sentido de rotação, também é necessário identificar o posicionamento do vetor, divididos nos seguintes casos:

¹ <https://www.geogebra.org/>

² <https://www.tinkercad.com/>

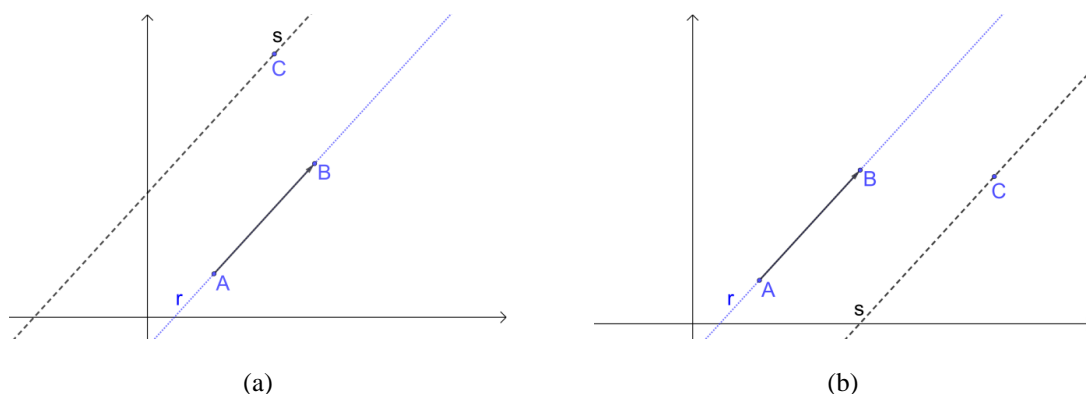
- **Vetor direcionado para cima e para a direita:** Nesse caso, o ponto B deverá ter coordenadas maiores que o ponto A, resultando em:
 - $x_b > x_a$: Isso implica que o ponto B está mais à direita de A;
 - $y_b > y_a$: Indica que o ponto B está acima do ponto A.
- **Vetor direcionado para cima e para a esquerda:** Nesta situação, o ponto B estará posicionado à esquerda e acima de A, resultando em:
 - $x_b < x_a$: Isso implica que o ponto B está mais à esquerda de A;
 - $y_b > y_a$: Indica que o ponto B está acima do ponto A.
- **Vetor direcionado para baixo e para a direita:** Para satisfazer essa condição o ponto B deverá estar posicionado à direita e abaixo de A, tendo as seguintes desigualdades:
 - $x_b > x_a$: Isso implica que o ponto B está à direita de A;
 - $y_b < y_a$: Indica que o ponto B está abaixo do ponto A.
- **Vetor direcionado para baixo e para a esquerda:** Implica que o ponto B está posicionado à esquerda e abaixo de A, de onde obtém-se que:
 - $x_b < x_a$: Isso implica que o ponto B está mais à esquerda de A;
 - $y_b < y_a$: Indica que o ponto B está abaixo do ponto A.

Identificado o sentido e a direção do vetor, será feita a análise do sentido de rotação para cada um dos 4 casos, conforme o posicionamento do vetor no plano.

1º Caso: quando o vetor está direcionado para cima e para a direita

A figura 5 representa um vetor com direcionamento para cima e para a direita.

Figura 5 – Vetor para cima e para direita com ponto à esquerda (a) e à direita (b).



Fonte: Autores, 2023.

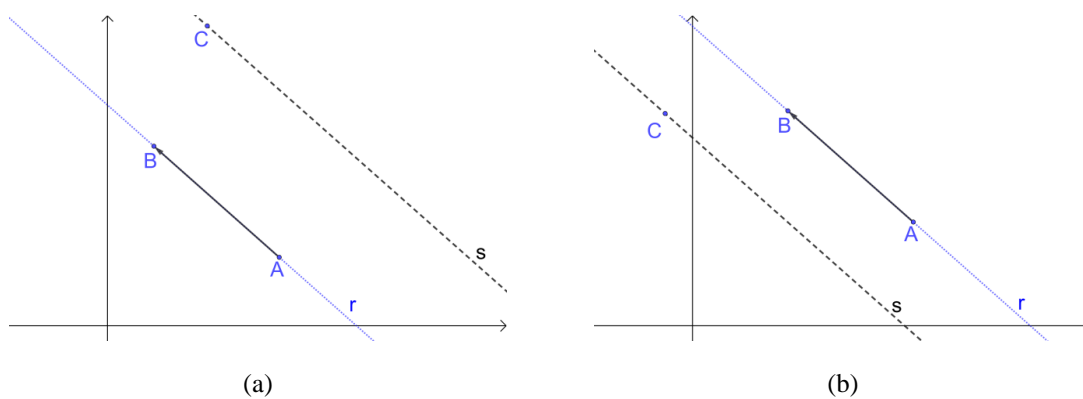
Após identificar o sentido e a direção do vetor, faz-se necessário determinar o sentido de rotação. Para isso, foi adotado o seguinte recurso: a análise dos coeficientes lineares, b , de cada reta.

Quando são traçadas duas retas, sendo a reta r que contenha o vetor \overline{AB} e uma reta s paralela a r , que contenha o ponto C , possibilita determinar se o ponto para onde deverá deslocar-se está acima ou abaixo do seu posicionamento atual. Como r e s são paralelas o coeficiente angular, a , será o mesmo e pode ser calculado por meio da equação (2). Utilizando a equação (3), será calculado o coeficiente linear b_r e b_s . Na figura 5(a), $b_r < b_s$, portanto, para essa situação, deverá rotacionar para a esquerda. Entretanto, para a figura 5(b), $b_r > b_s$, devendo rotacionar para a direita.

2º caso: quando o vetor está direcionado para cima e para a esquerda

Para o 2º caso, será feita uma análise semelhante da que foi feita para o 1º caso, utilizando o coeficiente linear das retas r e s .

Figura 6 – Vetor para cima e para a esquerda com ponto à direita (a) e à esquerda (b).



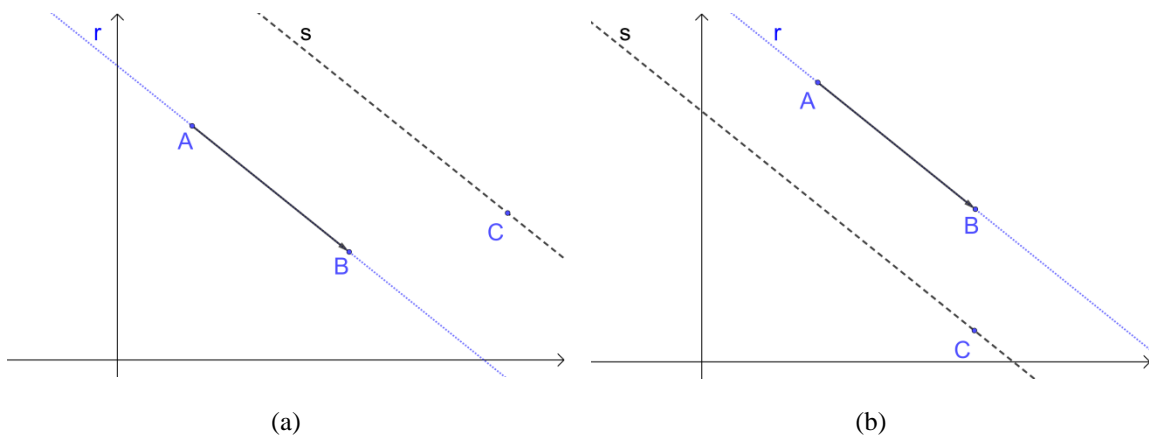
Fonte: Autores, 2023.

Assim, analisando a figura 6 (a), pode-se perceber que $b_r < b_s$, implicando que rotacione para a direita. Observando a figura 6(b), chega-se a conclusão de que $b_r > b_s$, devendo assim, rotacionar para a esquerda.

3º caso: vetor está direcionado para baixo e para a direita

Para o 3º caso, obtém-se os gráficos da figura 7:

Figura 7 – Vetor para baixo e para a direita com ponto à esquerda (a) e à direita (b).



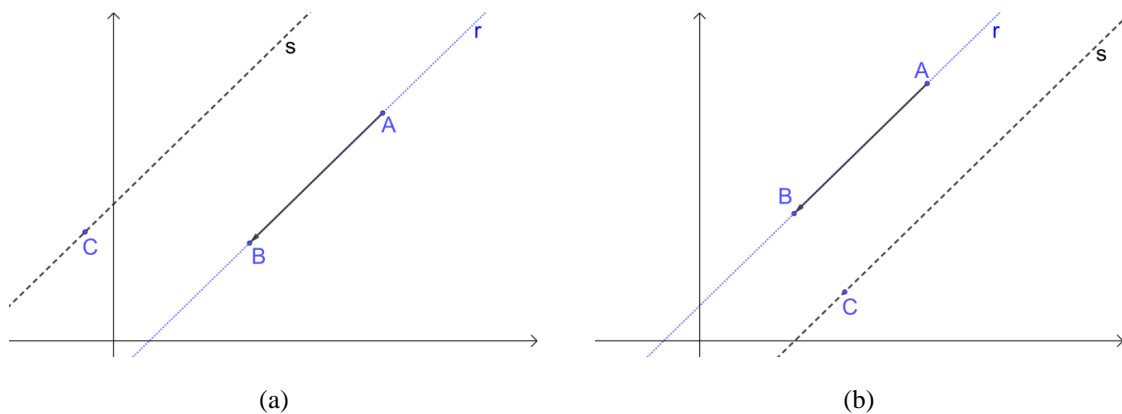
Fonte: Autores, 2023.

Realizando a comparação entre os coeficientes das retas r e s , percebe-se que na figura 7(a), $b_r < b_s$, sendo necessário rotacionar para a esquerda. A figura 7(b) apresenta que $b_r > b_s$, sendo necessário rotacionar para a direita.

4º caso: vetor está direcionado para baixo e para a esquerda

Por fim, para o 4º caso, têm-se as situações apresentadas na figura 8.

Figura 8 – Vetor para baixo e para a esquerda com ponto à direita (a) e à esquerda (b).

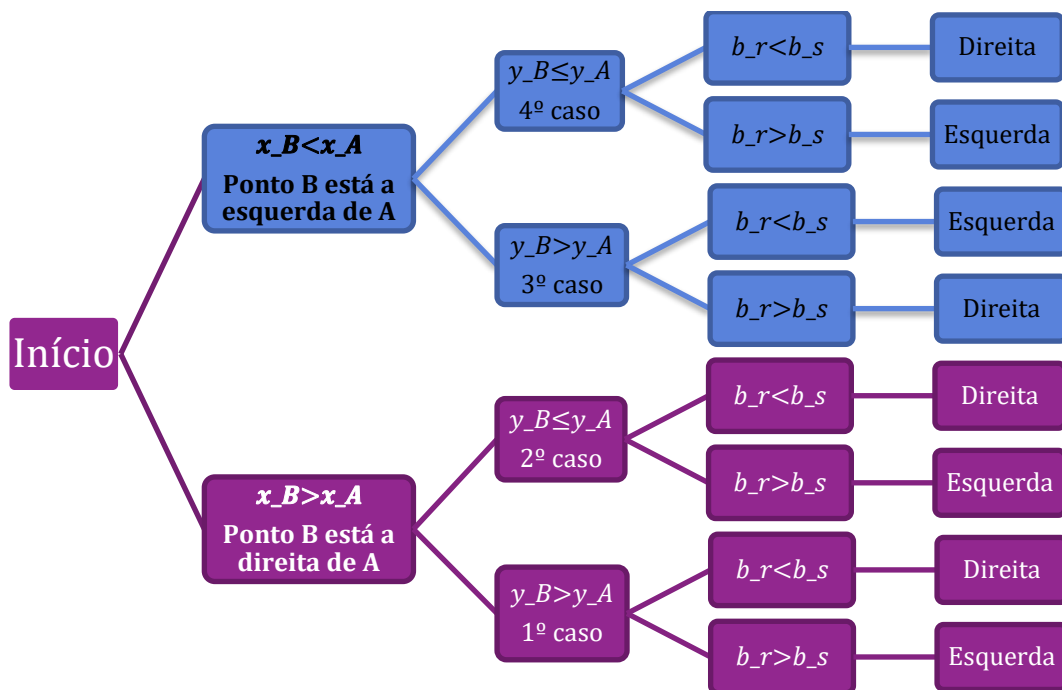


Fonte: Autores, 2023.

Na figura 8(a), visualiza-se que $b_r < b_s$, necessitando que rotacione para a direita. Analisando a figura 8(b), tem-se que $b_r > b_s$, realizando a rotação para a esquerda.

A figura 9, mostra um fluxograma com os quatro casos apresentados.

Figura 9 – Fluxograma com o resumo dos 4 casos estudados



Fonte: Autores, 2023.

CÁLCULO DO CASO PARTICULAR ($x_A = x_B$)

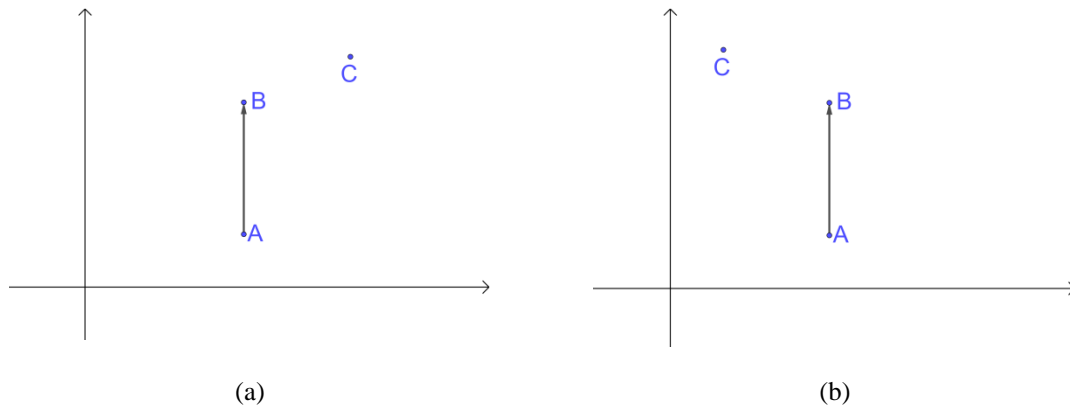
Ao realizar o estudo, observou-se um caso particular, quando o vetor estava na vertical, onde resulta que $x_A = x_B$. Ao calcular o valor do coeficiente angular irá incorrer em uma divisão por 0, impossibilitando o cálculo do coeficiente angular.

Para este caso, deverá ser determinado se o vetor encontra-se apontado para cima ($y_B > y_A$) ou para baixo ($y_B < y_A$), possibilitando estabelecer o sentido de rotação para esses dois casos.

1º caso: vetor com $x_B = x_A$ e $y_B > y_A$

Para esse caso, teremos um vetor na vertical apontando para cima. A situação é representada na figura 10.

Figura 10 – Vetor na vertical e para cima com ponto à direita (a) e à esquerda (b).



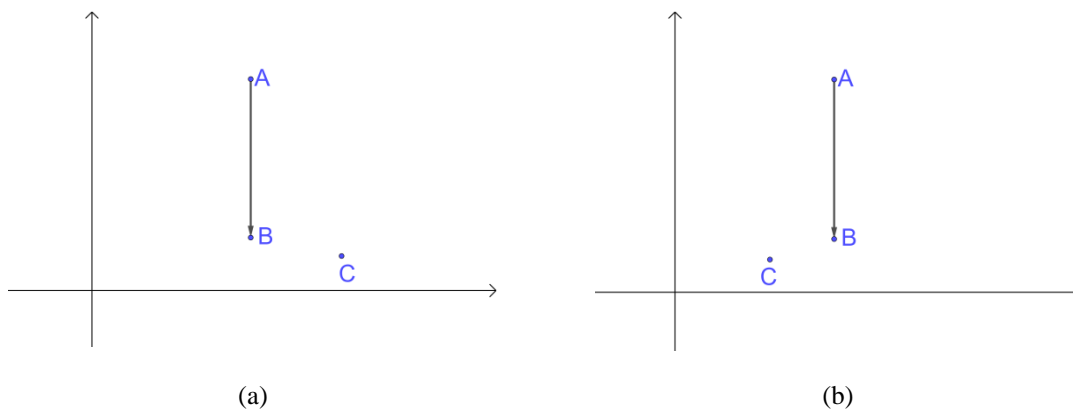
Fonte: Autores, 2023.

Por meio da análise da figura 10(a), é possível deduzir que $x_C > x_B$, devendo rotacionar para a direita. A figura 10(b) permite perceber que $x_C < x_B$, fazendo com que, para esse caso, o sentido de rotação deva ser para a esquerda.

2º Caso: vetor com $x_B = x_A$ e $y_B < y_A$

Quando o vetor está apontando para baixo obtém-se uma situação com as condições contrárias para o caso apresentado anteriormente, conforme figura 11.

Figura 11 – Vetor na vertical e para baixo com ponto à esquerda (a) e à direita (b).



Fonte: Autores, 2023.

Assim, é possível constatar na figura 11(a) que $x_C > x_B$, devendo rotacionar para a esquerda. A figura 11(b) permite inferir que $x_C < x_B$, sendo que seu sentido de rotação para esse caso será a direita.

Ainda pode ocorrer a situação onde $x_A = x_B = x_C$. Para isso, basta considerar $x_C \geq x_B$ ou $x_C \leq x_B$. Ao calcular o ângulo entre o vetor \overrightarrow{AB} , posição atual do veículo, e \overrightarrow{BC} , posição para

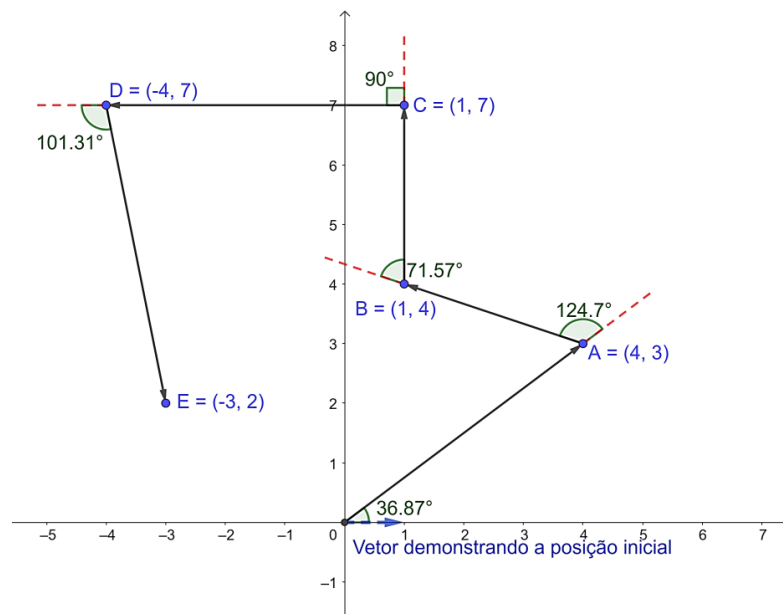
qual irá se deslocar, terá como resultado 0° ou 180° , sendo indiferente o sentido de rotação que escolher.

A implementação do código no Tinkercad

Como forma de verificar os resultados obtidos, utilizou-se o simulador “Circuitos” disponível no Tinkercad. Nesse primeiro momento, não foi considerado o uso de motores, mas somente a implementação dos resultados matemáticos em código para ser utilizado em um controlador Arduino.

Ao elaborar a programação, optou-se para que o sistema fornecesse como informação o ângulo que deve rotacionar e o sentido de rotação. Os resultados obtidos foram comparados com os gráficos gerados no Geogebra, conforme figura 12, onde o sentido e direção dos vetores representam o caminho que deverá ser percorrido pelo veículo.

Figura 12 – Pontos utilizados para verificar os resultados.



Fonte: Autores, 2023.

O monitor serial apresentou os seguintes resultados:

```

movimentacao 1
valor do angulo : 36.876853

esquerda
-----

movimentacao 2
valor do angulo : 124.72

esquerda
-----

movimentacao 3
    
```

```
valor do angulo : 71.58
```

```
direita
-----
```

```
movimentacao 4
valor do angulo : 90.02
```

```
esquerda
-----
```

```
movimentacao 5
valor do angulo : 101.33
```

```
esquerda
-----
```

Durante sua implementação, verificou-se a necessidade do primeiro movimento ser feito de maneira separada dos seguintes, devido ao fato de ser preciso realizar um processo iterativo, por meio de um laço for, para realizar as demais movimentações e a troca dos valores atribuídos aos pontos P_{n-1} , P_n e P_{n+1} . O ponto P_n é o ponto onde o veículo se encontra, P_{n-1} é o ponto anterior e P_{n+1} é o próximo ponto para onde irá se deslocar. Para o primeiro movimento serão considerados os pontos $P_{n-1} = (0,0)$, $P_n = (1,0)$ e $P_{n+1} = (4,3)$. O ângulo de rotação é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ e $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$, calculados conforme a equação (6). O sentido de rotação é definido pelo processo apresentado na figura 9 e pelos casos particulares apresentados anteriormente.

Após esse primeiro movimento, haverá a troca dos valores dos pontos, sendo que $P_{n-1} = (0,0)$, P_n recebe o valor de $A = (3,4)$ e P_{n+1} terá atribuído a ele o valor do próximo ponto $B = (1,4)$. Esse processo será repetido até realizar a movimentação para o último ponto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho realizado apresentou como resultado a possibilidade de realizar o deslocamento de um veículo autônomo sem o uso de sensores, utilizando somente as coordenadas do plano cartesiano e conceitos de geometria. Ressalta-se que a não utilização dos sensores reduz a complexidade do projeto e diminui os gastos também. Entretanto, é necessário que o ambiente a ser percorrido pelo veículo seja totalmente observável, já que, neste caso, não existe a possibilidade de desviar de obstáculos, por exemplo.

O grande desafio enfrentado neste estudo foi determinar o sentido de rotação e a sua implementação no Tinkercad. Os resultados obtidos foram de encontro com o que era esperado se obter com este estudo, possibilitando o cálculo do ângulo e determinado o sentido de rotação. Pretende-se utilizar os conceitos obtidos em novos projetos de pesquisa que envolvam a construção do protótipo e aplicações na automação de processos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, F. M. D.; RODRIGUES, K. S.; AMORIM, E. M.; DA COSTA, N. P. **O uso da robótica educacional como ferramenta mediadora no processo de ensino-aprendizagem da matemática no ensino fundamental em Lábrea-AM.** In: ENCONTRO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO DOS INSTITUTOS FEDERAIS (ENCOMPIF), 5. 2018, Natal. Anais do V Encontro Nacional de Computação dos Institutos Federais. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, July 2018. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/encompif/article/view/3567/3526> Acesso em: 30 abr. 2023.

BILL, L.; SHAHNASSER, H. **Development and implementation of an autonomously driven vehicle prototype.** In: IEEE. 2019 IEEE 2nd International Conference on Electronics Technology (ICET). [S. l.], 2019. p. 310–314.

BRASIL. **Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica.** Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em: 12 out. 2022.

CORDEIRO, R. de A. et al. **Modelagem e controle de trajetória de um veículo robótico terrestre de exterior.** [S. l.]: UNICAMP, 2013.

DE AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V. Processo formativo em matemática e robótica: construcionismo, pensamento computacional e aprendizagem criativa. **Tecnologias, Sociedade e Conhecimento**, v. 7, n. 2, p. 85-107, 2020. <https://doi.org/10.20396/tsc.v7i2.14857>

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica.** 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá.** 5. ed. Campinas: Papirus, 2014.

SANTOS, E. O. dos et al. **Robótica educacional nas escolas de Curitiba: possibilidades pedagógicas para o ensino de matemática com o Ludobot.** 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

TINKERCAD. **Tinkercad.** 2023. Disponível em: <https://www.tinkercad.com/>. Acesso em: 05 mai. 2023.

WEI, D. C. M. **Método de desvio de obstáculos aplicado em veículo autônomo.** Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2015

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica.** 2. ed. São Paulo: Pearson, 2014.