
A substituição de uma Função Transcendente em um determinado intervalo por uma função polinomial utilizando o Polinômio Interpolador de Newton.

The replacement of a Transcendent Function in a given interval by a polynomial function using Newton's Polynomial Interpolator.

Gustavo Nogueira Dias^{1*}, Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior, Afonso Costa da Silva Filho, Wagner Davy Lucas Barreto, Ricardo Daniel Soares Santos, José Carlos Barros de Souza Júnior¹, Cássio Pinho dos Reis², Katiane Pereira da Silva, Antonio Thiago Madeira Beirão, Alessandra Epifanio Rodrigues³

Received: 2023-01-03 | Accepted: 2023-02-05 | Published: 2023-02-11

RESUMO

O trabalho trata da substituição de uma função transcendente por uma polinomial, determinada através do polinômio Interpolador de Newton, em um determinado intervalo, de forma que as características nesse espaço tenham um desempenho similar à da função original. A pesquisa possibilita inúmeras aplicações no ramo científico, pois funções polinomiais admitem uma previsibilidade melhor na exposição dos seus gráficos como também na entrada de pontos analíticos e resultados de fácil manipulação e exposição. Foram apresentados alguns exemplos de aplicação no cálculo de integrais, apresentando os cálculos e obtendo a função interpoladora. Um quadro comparativo foi exibido com quatro funções transcendentais, apresentando resultados igualmente aceitáveis. A substituição destas funções no cálculo integral possibilita resultados com erros com uma margem possivelmente aceitáveis em intervalos preestabelecidos.

Palavras Chaves: Função Transcendente; Polinomial; Polinômio Interpolador; Cálculo Integral;

ABSTRACT

The work deals with the substitution of a transcendental function by a polynomial one, determined through Newton's Interpolator polynomial, in a certain interval, so that the characteristics in that space have a performance similar to that of the original function. Research enables numerous applications in the scientific field, as polynomial functions allow better predictability in the display of their graphics as well as in the entry of analytical points and results that are easy to manipulate and display. Some examples of application in the calculation of integrals were presented, presenting the calculations and obtaining the interpolating function. A comparative table was displayed with four transcendental functions, presenting equally acceptable results. The substitution of these functions in the integral calculation allows results with errors with a possibly acceptable margin in pre-established intervals.

Keywords: Transcendent Function; Polynomial; Interpolating polynomial; Integral Calculus;

¹ Colégio Federal Tenente Rêgo Barros. E-mail: gustavonogueiradiaz@gmail.com

² Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. E-mail: cassio.reis@ufms.br

³ Universidade Federal Rural da Amazônia. E-mail: Katiane.silva@ufra.edu.br

INTRODUÇÃO

A etimologia da palavra Trigonometria revela “pistas” sobre como utilizá-la, suas aplicações e a importância de conteúdos na Matemática e em outros campos científicos—tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir) (RODRIGUES et al, 2022). A trigonometria é um ramo da matemática onde os gregos e babilônios foram os pioneiros a analisar e desenvolver estudos sobre as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos retângulos enquanto tentavam resolver os clássicos problemas de astronomia (SILVA e LIMA, 202).

Em consideração aos cálculos matemáticos das funções trigonométricas, muitos esforços são realizados a fim de reduzir e simplificar a função dada para uma básica, como a exemplo, as funções seno, cosseno e tangente de um arco, onde seus gráficos, limites e estudo são muito conhecidos em inúmeras literaturas, o que torna a interpretação do resultado uma forma mais simples e exata de expressá-la. Com base nisso, a trigonometria, como qualquer outra área científica, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades que foram se moldando através da modernidade e sendo abraçada em várias áreas da ciência.

Oliveira (2021) faz uma importante relação entre a trigonometria e a astronomia. Segundo o autor, a astronomia possui íntimas conexões com a origem histórica da trigonometria. Por sua vez, Nogueira (2009), afirma que o nascimento da ciência se encontra estreitamente ligada à astronomia.

Lima et al (2005) relata que as funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia a dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

Dante (2016) comenta sobre os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são fenômenos físicos periódicos. As funções trigonométricas, principalmente as senóides, são ótimas para descrever aproximadamente tais fenômenos, uma vez que são funções periódicas. Mesmo que sejam modelos aproximados dos fenômenos reais, são importantes pela sua simplicidade: neles são necessários apenas quatro parâmetros para ajustar, de forma bastante razoável, uma senoide, uma cossenóide a um fenômeno periódico.

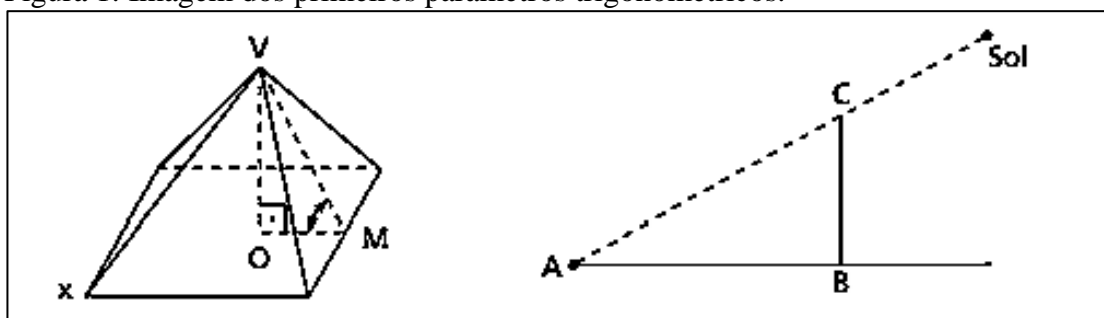
Na concepção de Iezzi (2013) a trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época. Mas, considerando o termo trigonometria no seu sentido literal (medida do triângulo), a origem do assunto pode ser situada já no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. O papiro Rhind, importante documento sobre a matemática egípcia (aproximadamente 1700 a.C.), menciona por quatro vezes o seqt de um ângulo, em

conexão com problemas métricos sobre pirâmides. O seqt do ângulo OMV na figura abaixo é a razão entre OM e OV e, portanto, corresponde à ideia atual de cotangente.

Segundo Boyer (1947), os povos egípcios já a utilizavam a trigonometria, de forma inconsciente, nas construções de suas pirâmides. Sua trigonometria era considerada primitiva, pois ainda não existia as relações métricas do triângulo retângulo naqueles tempos, porém, o pensamento era o mesmo, mesmo que sendo aplicado com outras unidades e padrões de medidas diferentes dos nossos.

As pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (medida de OMV) fosse constante — aproximadamente 52° . Egípcios e babilônios (aproximadamente 1500 a.C.) e posteriormente os gregos usavam relógios de sol em que era utilizada a mesma ideia. Tais relógios consistiam basicamente em uma haste BC , chamada pelos gregos de gnomon, fincada verticalmente no chão. O exame da variação da amplitude da sombra AB projetada pela haste propiciava a determinação de parâmetros, como a duração do ano.

Figura 1: Imagem dos primeiros parâmetros trigonométricos.



Fonte: Iezzi (2013).

Metodologia

O artigo propõe a substituição de funções trigonométricas por outra polinomial utilizando o método de Newton por diferenças divididas. Este problema surgiu durante a exposição da disciplina de Cálculo Numérico em uma palestra realizada na Universidade Esamaz, na cidade de Belém, quando da realização de uma integral que não apresentava uma redução algébrica eficaz e correta, momento em que um aluno sugeriu a possibilidade da troca da função.

Inicialmente, não compreendi o questionamento, mas fiquei refletindo da possibilidade. Agora em 2022, em dezembro em atividade com o grupo de pesquisa começamos a trabalhar a possibilidade e através deste trabalho chegamos a alguns resultados plausíveis que serão expostos a seguir.

Com relação ao método de diferenças divididas, na concepção de Barroso et al (1987), Sperandio et al (2003), seja $y = f(x)$ a função que contém os pontos distintos (x_i, y_i) , onde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

A derivada primeira da função $f(x)$, no ponto x_0 é definida por:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A diferença dividida de 1ª ordem é definida como uma aproximação da derivada primeira, ou seja:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ usando } f[x, x_0] \text{ ou } \Delta y_0 \text{ como notação de diferença dividida, temos:}$$

Fazendo $x = x_1$, tem-se a diferença dividida de 1ª ordem, em relação aos argumentos x_0 e x_1 :

$$\Delta y_0 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Em geral, a diferença dividida de 1ª ordem, pode ser definida por:

$$\Delta y_i = f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Lembrando $y_i = f(x_i)$, vem:

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

A diferença dividida de ordem zero é assim definida:

$$\Delta^0 y_i = f[x_i] = f(x_i) = y_i$$

Pode-se escrever a diferença dividida de 1ª ordem em função da diferença divididas de ordem zero:

$$\Delta y_i = f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Generalizando, podemos expressar a diferença dividida por:

$$\Delta^n y_i = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$$

Considere a tabela de aplicação de diferenças dividida:

i	x_i	y_i
0	0,8	2,5
1	1,2	3,8
2	2	6,8

$$\Delta y_0 = [x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3,8 - 2,5}{1,2 - 0,8} = \frac{1,3}{0,4} = 3,25$$

$$\begin{aligned} \Delta y_1 = [x_1, x_2] &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6,8 - 3,8}{2 - 1,2} = \frac{3}{0,8} = 3,75 \\ &= \frac{3,75 - 3,25}{2 - 0,8} = \frac{0,5}{1,2} = 0,416 \end{aligned}$$

$$\Delta^2 y_0 = [x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Agrupando os valores em uma tabela temos:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,8	2,5	3,25	0,416
1	1,2	3,8	3,75	
2	2	6,8		

Observando a tabela do exemplo acima nota-se que com três pontos dados, podem ser calculadas duas diferenças divididas de 1ª ordem e uma de 2ª ordem. Genericamente, tendo $n + 1$ pontos disponíveis, pode-se calcular n diferenças divididas de 1ª ordem, $n - 1$ de 2ª ordem e assim sucessivamente, até uma diferença dividida de ordem n .

Teorema: Considerando uma função $f(x)$ é uma polinomial de grau n que passa pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k), \dots, (x_n, y_n)$, então a diferença dividida de ordem k , $f[x, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}]$, é um polinômio de grau $n - k$, (BARROSO et al 1987, p. 96).

A tabela de diferenças divididas faz surgir o polinômio interpolador de Newton, como segue abaixo:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + \dots \dots (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \cdot \Delta^n y_0$$

A proposta do trabalho é atribuir pontos dentro de um intervalo preestabelecido de forma que a função trigonométrica fique substituída por uma função polinomial em um determinado intervalo, de forma que tenha uma similaridade pelo menos parcial em um intervalo preestabelecido.

Materiais e métodos

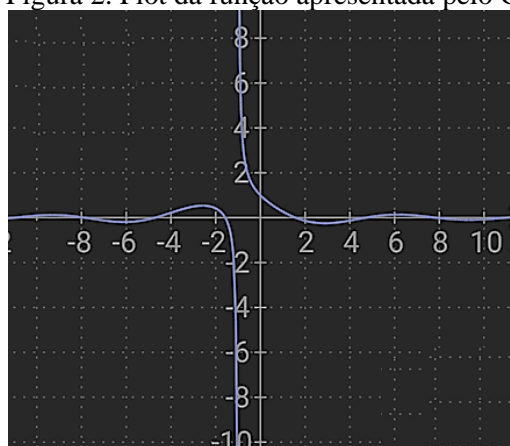
As maiores dúvidas ocorrem no cálculo de integrais em que a simplificação das funções trigonométricas se torna inviável, e o processo teórico indicado é calcular a integral por processos numéricos como a regra do trapézio ou de Simpson.

Como exemplo, vamos calcular a integral da função:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

Fazendo o gráfico da função encontramos:

Figura 2. Plot da função apresentada pelo Geogebra



Fonte: Autores

Percebemos a partir de x maior de $-0,99$ temos uma curva estabelecida ao redor do 1º quadrante e quando x for menor que $-1,01$ a curva será estabelecida no entorno do 3º quadrante.

Entendemos que esta função transcendente pode ser representada por duas curvas polinomiais.

Para tentarmos a substituição, temos que atribuímos pontos aleatórios para as duas possíveis curvas representativas:

1ª Curva representativa no em torno do 1º quadrante:

$$y = \frac{\cos x}{1 + x}$$

x	y
0	1
$\pi/4 = 0,785$	0,396
$\pi/2 = 1,57$	0
$\pi = 3,13$	-0,24

Colocando os dados na tabela de Newton para diferenças divididas temos:

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	-0,7694	0,169	-0,008
$\pi/4 = 0,785$	0,396	-0,50446	0,15	
$\pi/2 = 1,57$	0	-0,154		
$\pi = 3,13$	-0,24			

Utilizando o polinômio de Newton temos:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + \dots \dots (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \cdot \Delta^n y_0$$

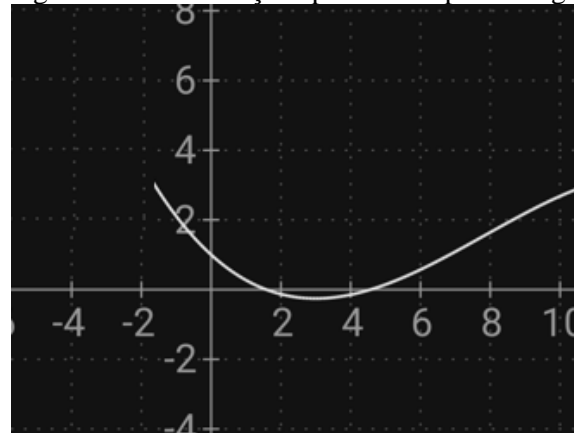
$$P_n(x) = 1 + (x - 0) \cdot (-0,7694) + (x - 0) \cdot (x - 0,785) \cdot 0,169 + (x - 0)(x - 0,785)(x - 1,57) \cdot (-0,008)$$

$$P_n(x) = 1 - 0,7694x + 0,169x^2 - 0,132x - 0,008x^3 + 0,01884x^2 - 0,00985x$$

$$P_n(x) = 1 - 0,91x + 0,1878x^2 - 0,008x^3$$

Fazendo o gráfico para $x > -0,99$ temos:

Figura 3. Plot da função apresentada pelo Geogebra



Fonte: autores

Com o gráfico da função obtida através da interpolação de Newton, observamos que para o domínio $(-0,99 < x < 5)$ temos uma curva similar a curva representativa em torno do 1º quadrante.

Com relação ao cálculo da integral:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

Desenvolvendo pelo aplicativo Calculus tools obtemos como resultado 0,601. Calculando a integral no intervalo de 0 a 1 com a função substitutiva:

$$1. \int_0^1 (1 - 0,91x + 0,1878x^2 - 0,008x^3) dx = 0,6056$$

Observando os resultados observamos a ocorrência de um erro em torno de 0,77%, ou seja, neste intervalo um erro menor que 1%.

Fazendo a alteração dos limites da integral, temos:

$$\int_0^2 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

Desenvolvendo pelo aplicativo Calculus tools obtemos como resultado 0,6418.

Calculando a integral no intervalo de 0 a 2 com a função substitutiva:

$$\int_0^2 (1 - 0,91x + 0,1878x^2 - 0,008x^3) dx = 0,6488$$

Observando os resultados observamos a ocorrência de um erro em torno de 1,09%, ou seja, neste intervalo um erro próximo a 1%.

2ª Curva representativa no em torno do 3º quadrante:

$$y = \frac{\cos x}{1+x}$$

x	y
-1,5	-0,14
$-\pi/2 = -1,57$	0
$-\pi$	-0,47
-2π	-0,19

Colocando os dados na tabela de Newton para diferenças divididas temos:

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1,5	-0,14	-2	-1,4	-0,31
$-\pi/2 = -1,57$	0	0,30	0,045	
$-\pi$	-0,47	0,09		
-2π	-0,19			

Utilizando o polinômio de Newton temos:

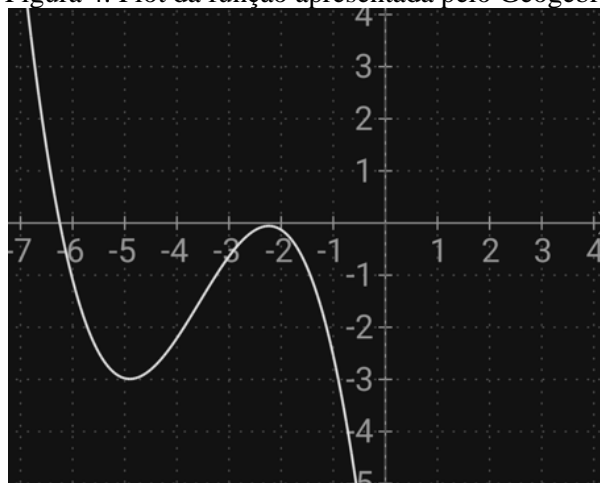
$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + \dots \dots (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \cdot \Delta^n y_0$$

$$P_n(x) = -0,14 + (x + 1,5) \cdot (-2) + (x + 1,5) \cdot (x + 1,57) \cdot (-1,4) + (x + 1,5)(x + 1,57)(x + 3,14) \cdot (-0,31)$$

$$P_n(x) = -0,31x^3 - 3,32x^2 - 10,2x - 9,73$$

Fazendo o gráfico para $x < -1,5$ obtemos:

Figura 4. Plot da função apresentada pelo Geogebra



Fonte: autores

Com o gráfico da função obtida através da interpolação de Newton, observamos que para o domínio ($-0,9 < x < -4$) temos uma curva similar a curva representativa em torno do 3º quadrante.

Obviamente este caso aplica-se a integral cuja os limites sejam compatíveis ao intervalo, ou seja com $x < -1,5$, o que teríamos um resultado próximo.

Com relação ao cálculo da integral:

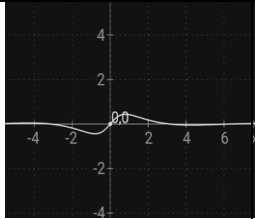
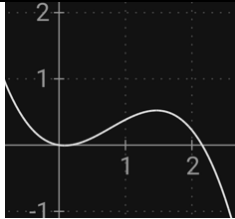
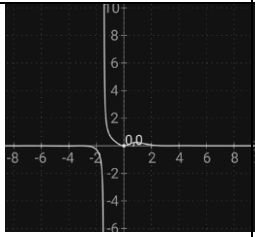
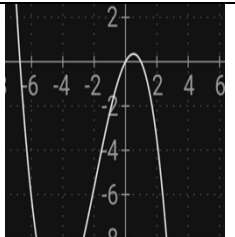
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$$

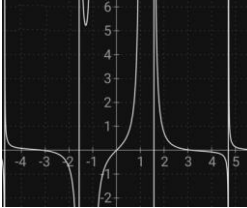
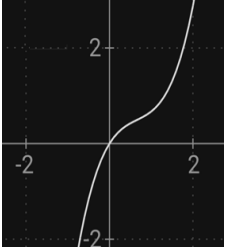
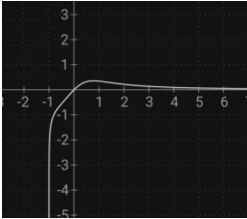
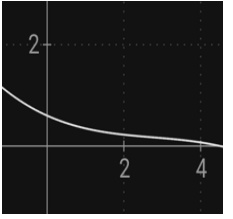
Desenvolvendo pelo aplicativo Calculus tools obtemos como resultado 0,601. Calculando a integral no intervalo de 0 a 1 com a função substitutiva para a função calculada para o 3º quadrante:

$$\int_0^1 (-0,31x^3 - 3,32x^2 - 10,2x - 9,73) dx = 13,86$$

Observando os resultados observamos a ocorrência de um erro não aceitável, ou seja, neste intervalo não consideramos a sua aplicação, justamente pela opção da projeção do gráfico em torno do 3º quadrante diversamente do intervalo solicitado.

A seguir segue um quadro comparativo de algumas funções transcendentais e a sua transformação para função polinomial.

FUNÇÕES TRANSCEDENTES		Resulta do Real	Resultado utilizando função interpoladora no intervalo de integração	Gráfico Real	Gráfico da Função Interpoladora
1. $y = \frac{\text{sen}x}{1+x^2}$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}x}{1+x^2} dx$	0,52	$\int_0^{\pi/2} (-0,4x^3 + 0,93x^2 - 0,147x) dx = \mathbf{0,42}$		
2. $y = \frac{\text{sen}^2x}{1+x^2+x^3}$	$\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^2x}{1+x^2+x^3} dx$	0,15	$\int_0^{\pi/3} (-0,2x^3 - 1,15x^2 + 1,33x) dx = \mathbf{0,22}$		

<p>3.</p> $y = \frac{tgx}{1-x^2}$	$\int_0^{\pi/3} \frac{tgx}{1+x^2} dx$	<p>0,45</p>	$\int_0^{\pi/3} (0,75x^3 - 1,48x^2 + 1,4x) dx = \mathbf{0,43}$		
<p>4.</p> $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$	$\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$	<p>0,457</p>	$\int_1^3 (-0,012x^3 + 0,1x^2 - 0,34x + 0,6) dx = \mathbf{0,466}$		

Observando o quadro acima percebemos muitas similaridades no intervalo solicitado da integral com os gráficos das funções solicitadas inicialmente e da função interpolada pela interpolação de Newton (Diferença divididas).

Na função 1, obtemos como resultado da integral obtido na calculadora o valor de 0,52. Calculando a função interpoladora tivemos como resultado o valor de 0,42, um valor bem próximo ao interpolado. Observando os gráficos percebemos que a curva da função original no intervalo de 0 a $\pi/2$, equivalente a 0 a 1,57, apresenta uma similaridade neste intervalo quando interpolamos a função. Olhamos apenas para o eixo x, notando esses intervalos.

Com relação a função 2, obtivemos um valor próximo ao valor real e com relação aos gráficos, no intervalo solicitado de 0 a $\pi/3$ ou 0 a 1,047, o gráfico apresenta uma similaridade, olhando apenas para o eixo x, no intervalo solicitado.

A função 3, apresentou um resultado praticamente igual ao valor real, e o gráfico quando x varia de 0 a $\pi/3$ ou de 0 a 1,047, temos um gráfico semelhante.

A função 4, apesar de não conter funções trigonométricas envolvidas, apresentou um resultado praticamente igual quando interpolada no intervalo solicitado. O gráfico, observado quando x varia de 1 até 3, apresentou uma similaridade.

Considerações finais

O processo mostrou que funções transcendentais, podem ser substituídas por uma polinomial, quando observado um intervalo específico do domínio expresso pelos gráficos.

É importante frisar que os resultados obtidos não são iguais, possuem uma aproximação e uma similaridade com a função original. Naturalmente existe o erro de cálculo efetuado na substituição das funções que deve ser considerado.

Com relação ao cálculo de integrais, observando o limite ofertado pela proposta, é interessante utilizar a função que mais se adequa ao intervalo proposto e amostrado no gráfico.

O fato de substituirmos a função apresentada por uma polinomial no intervalo solicitado, abre uma série de discussões a respeito. Na ciência podemos ter avanços significativos em relação as funções apresentadas e as interpoladas.

O cálculo das funções interpoladas pode ser obtido por programas em poucos segundos, sendo possível fazer muitas interpolações otimizando os resultados que calculamos com apenas 4 interpolações, e em todos os casos usamos uma função do 3º grau, sendo que programas como o Excel, da Microsoft já fazem com inúmeras interpolações.

É provável que quanto o maior número de interpolações, consigamos uma função mais perfeita e com resultados com menos erros apresentados, tornando o assunto mais interessante para efetuarmos a substituições das funções apresentadas.

REFERÊNCIAS

- BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; FILHO, F. F. C.; CARVALHO, M. L. B.; MAIA, M. L. **Cálculo Numérico com Aplicações**. Ed. Harbra, São Paulo, 1987.
- BOYER, C. **História da matemática** - trad. de Elza Gomide, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**, Luiz Roberto Dante, 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**, volume 3: trigonometria, Gelson Iezzi. 9º ed., São Paulo: Ed. Atual, 2013.
- LIMA, E. L., CARVALHO, P. C.P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1, Coleção Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- NOGUEIRA, S. **Astronomia: Ensino Fundamental e médio**. Brasília: MEC, SEB; MCT; AEB. 232 p.:il. – (Coleção Explorando o ensino; v. 11), 2009.

OLIVEIRA, E. G. de. **Contando um pouco da história da trigonometria**. Revena - Revista Brasileira De Ensino E Aprendizagem, 1, 29–58, 2021.

RODRIGUES, P. F. C.; SOUZA, M. A. V. F. de; THIENGO, E. R. **Trigonometria: conhecimento de conteúdo e de ensino fundamentados em uma revisão sistemática de literatura**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.], v. 13, n. 5, p. 1–23. DOI: 10.26843/rencima.v13n5a25, 2022.

SILVA, M. T. V.; LIMA, A. A. N. **Trigonometria: uma discussão histórica**. TCC. Licenciatura Matemática. Instituto Federal de Pernambuco. Campus Pesqueira, 2021.

SPERANDIO, D; MENDES, J. T.; MONKEY, L. H. **Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**, 1ª Ed. Pearson Universitária, São Paulo, 2003.