DOI: 10.53660/CLM-3761-23P28

Determining the Limit of a Function with Indeterminate Result, Using Derivatives as a Didactic Transposition to the Teaching of Calculus.

A Determinação do Limite de uma Função com Resultado Indeterminado, Utilizando-se de Derivadas como Transposição Didática ao Ensino do Cálculo.

Received: 15-06-2024 | Accepted: 19-07-2024 | Published: 23-07-2024

Gustavo Nogueira Dias
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1315-9443
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil
E-mail: gustavonogueiradias@gmail.com
Henrique Maia Pinheiro
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5705-3486
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil
E-mail: henriquemaiactrb@gmail.com
Gilberto Emanoel Reis Vogado
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4763-4767
Universidade do Estado do Pará, Brasil
email: gilberto.vogado@uepa.br
Relinaldo Pinho de Oliveira
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5185-5007
Universidade Santo Amaro, Brasil
E-mail: relinaldopinhodeoliveira@gmail.com
Herson Oliveira da Rocha
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2494-6277
Instituto Politécnico da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil
E-mail: herson@ufra.edu.br
Jamille Carla Oliveira Araújo
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2273-2347
Universidade Federal Rural da Amazônia, Brasil
E-mail: jamillecarla@gmail.com
Anderson Portal Ferreira
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3428-8431
Instituto Federal do Pará, Brasil
E-mail: anderson.ferreira@ifpa.edu.br
Maria Graciete Rodrigues do Amaral
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5041-0735
Universidade do Estado do Pará, Brasil
E-mail: mariagraciete.amaral@uepa.br
Carlos Alberto Nobre da Silva
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5299-1713
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil
E-mail: cansnobre31@gmail.com
Fernando Roberto Braga Colares
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7125-9330
Universidade da Amazônia (UMAMA), Brasil
E-mail: fismat.fernando@gmail.com

ABSTRACT

In this article we present a didactic transposition regarding the teaching of function limits within Calculus. This subject, limits, in many problems, we can anticipate the application of derivatives in order to facilitate the act of raising the indeterminacy of functions, since l'Hôspital's rule is only presented to students at the end of the content of the teaching of derivatives. The proposal is to present the survey of indeterminacy through both processes, in which the derivative would be presented, only as a transposition, without the use of demonstration, only as a facilitating method. The content of the derived topic would continue at the beginning of the subject intended for this study with all the definitions that are necessary for understanding. Today, the calculation of limits, derivatives and integrals are already quickly calculated by Apple Store or Android applications, and manual calculation has become obsolete over the years, since these applications are quickly installed on most cell phone devices.

Keywords: Didactic Transposition; Limits; Derivatives; Calculation;

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma transposição didática a respeito do ensino de limites de funções dentro do Cálculo. Este assunto, limites, em muitos problemas, podemos antecipar a aplicação de derivadas a fim de facilitar o ato de levantar a indeterminação de funções, uma vez que a regra de l'Hôspital, só é apresentada aos discentes ao final do conteúdo do ensino de derivadas. A proposta é apresentar o levantamento da indeterminação pelos dois processos, em que apresentaria a derivada, apenas como uma transposição, sem a utilização da demonstração, apenas como método facilitador. O conteúdo do tópico derivada, iria continuar no início do assunto destinado a este estudo com todas as definições que lhe são necessárias à compreensão. Hoje, o Cálculo de limites, derivadas e Integrais já são calculados rapidamente por aplicativos Apple Store ou por Android, sendo o Cálculo manual tornou-se obsoleto com o passar dos anos, uma vez que esses aplicativos são rapidamente instalados na maioria dos aparelhos de celular.

Palavras-chave: Transposição Didática; Limites; Derivadas; Cálculo;

INTRODUÇÃO

Uma das primeiras manifestações do cálculo integral é devida a Antifon, um contemporâneo de Sócrates. Antifon argumentava que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a dos polígonos seria “ao fim” exaurida. E como sempre é possível construir um quadrado equivalente a qualquer polígono, a quadratura do círculo seria possível.
Apesar de sua inconsistência, a argumentação de Antifon contém o gérmen do método de exaustão, creditado a Eudóxio, cuja base é a proposição: “Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante outra parte não menor que sua metade, e assim por diante, numa determinada etapa do processo chega-se a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie fixada a priori”. Esse método representa o expediente grego para evitar processos infinitos — dos quais desconfiavam. (DOMINGUES, H. H, 2003).

E ninguém o manejou com tanta elegância e mestria como Arquimedes (287-212 a.C.). Natural de Siracusa, na época a maior cidade do mundo grego, situada na costa sudoeste da Sicília, Arquimedes era filho do astrônomo Fídias, talvez seu mestre. Mas é possível que tenha estudado em Alexandria, em virtude da correspondência regular que mantinha com alguns sábios do museu local, como, por exemplo, Eratóstenes. Seu excepcional talento para invenções mecânicas ganhou notoriedade, especialmente durante a Segunda Guerra Púnica, quando Siracusa foi sitiada pelos romanos. Graças aos engenhos bélicos que ideou, a cidade resistiu ao assédio romano por cerca de dois anos e só caiu devido a Arquimedes (287-212 a.C.). atos de traição de cidadãos locais. (IEZZI, 2013).

Matematicamente, o século XVII já reunia condições para a criação do cálculo diferencial e integral como disciplina independente da geometria — a álgebra simbólica e a geometria analítica, produtos recentes, propiciavam esse avanço. Por outro lado, os grandes problemas científicos da época requeriam um instrumento matemático mais ágil e abrangente que o método de exaustão.

Esses problemas eram principalmente quatro. O primeiro consistia em achar velocidade e aceleração de um móvel, conhecida a lei algébrica relacionando espaço percorrido e tempo (e vice-versa). O segundo dizia respeito à determinação de tangentes a curvas (questões de óptica, por exemplo, levavam a essa preocupação). O terceiro envolvia cálculos de máximos e mínimos (por exemplo, qual a máxima e qual a mínima distância de um planeta ao Sol?). (DOMINGUES, H. H, 2003).

Por fim, a obtenção de coisas como comprimentos, áreas, volumes e centros de gravidade, para as quais o método de exaustão exigia muita engenhosidade. Vários matemáticos do século XVII enfrentaram esses problemas, alguns com contribuições de grande porte. Entre estes, porém, dois se sobressaíram, cada um a seu modo, com papel decisivo: Newton e Leibniz.

Isaac Newton (1642-1727) nasceu na aldeia de Woolsthorpe, Inglaterra, filho póstumo de um pequeno sitiante da localidade. Ele próprio estava fadado ao mesmo destino, não fora a habilidade demonstrada em menino para a construção de engenhos mecânicos. Assim, mesmo não revelando nenhum brilho especial na escola pública em que ingressou aos 12 anos de idade, em 1661 chegava ao Trinity College, Cambridge, onde se graduaria em ciências quatro anos depois. A peste bubônica que assolou Londres a seguir levou-o a passar os dois anos seguintes em sua aldeia natal. Foi nesse período que engendrou as bases científicas do método dos fluxos (hoje cálculo diferencial) e da teoria da gravitação universal. (IEZZI, 2013).

Em 1669, dois anos após ter retornado a Cambridge para obter o grau de mestre, sucede Isaac Barrow (1630-1677) no Trinity College (por indicação do próprio Barrow, seu ex-professor). Somente em 1696 deixaria sua cadeira em Cambridge a fim de exercer funções públicas de alto nível em Londres (IEZZI, 2013).

A educação no Brasil tem passado por diversas transições gerando expectativas e esperanças para um novo cenário. Fazendo breve tracejado histórico sobre as mudanças ocorridas no processo educacional com destaque o fim do século XX, quando a preocupação era a busca por metas e objetivos na formação de um currículo que atendesse as novas gerações.

O ensino do cálculo, não é uma tarefa fácil, observa-se que existem algumas razões para esta dificuldade, talvez pela ausência de recursos pedagógicos e/ou falta de aplicação de uma metodologia de ensino que proporcione aos alunos o interesse em aprender, mais especificamente, falta de exemplos práticos que mostrem a aplicação da matemática no cotidiano dos alunos fora do ambiente escolar (SECCO, et al, 2020).

Neste mesmo contexto, pode-se incluir o Cálculo, um campo de aplicação da matemática que exige uma maior atenção por parte de professores, principalmente no que se refere ao assunto Limites e Derivadas.

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, são disciplinas da Matemática que estudam os movimentos e as variações, fornecendo ferramentas para o estudo de funções que explicam as mais variadas situações físicas e químicas.

Por conta disso, pode-se encontrar aplicações em muitas áreas do conhecimento e, por isso, é uma das disciplinas básicas de muitos cursos de graduação de engenharia (Jesus, et al. 2011).

Mesmo com toda a importância, o ensino de matemática é e sempre foi um grande desafio na vida de alunos ao longo da história, pois, constantemente a disciplina se depara com alunos completamente desestimulados com as disciplinas de matemática, como se pode ver em Wisland (2014).

Para Lima e Sauer (2003), a matemática possui fundamentação lógica e exige de seus alunos, uma formalização dos conceitos construídos em cada etapa. Assim, não faz sentido tratar dos conhecimentos matemáticos como apenas um conjunto de regras e fórmulas praticadas em situações modelos de aplicação (Barros & Meloni, 2006). Mais importante que aplicar corretamente uma determinada regra, é reconhecer sua devida aplicação. Entretanto, é um desafio para a grande maioria dos alunos.

É importante destacar que o conhecimento matemático é de extrema relevância em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. Assim, surgem alguns questionamentos: o que fazer para reverter o quadro adverso à matemática? Quais contribuições com a aplicação de uma sequência didática, que conduza o estudante a formação de novas estratégias?

No último levantamento do Censo da Educação Superior que ocorreu no ano de 2018, no Brasil existiam 8.450.755 alunos matriculados em cursos de graduações, sejam presenciais ou a distância, distribuídos em 2.537 instituições de ensino de educação superior (INEP, 2018). Destes, 2.077.481 são alunos de instituições públicas (municipais estaduais e federais).

As universidades públicas se estabeleceram, dentre outros papéis, como instituições de capacitação profissional e instrução social, acompanhando o desenvolvimento tecnológico e a demanda do mercado de trabalho, sendo centros de referências e respeito para a sociedade em geral (DURHAM, 2003).

Porém, o modelo pedagógico estabelece números determinados de vagas para acesso a este recurso, sendo assim necessária a seleção de estudantes que poderão ingressar nas instituições de ensino superior (IES) do país.

O processo de escolha da graduação e da área de interesse se dá em uma fase muito delicada da vida do jovem. Expectativas equivocadas, geralmente resultado do não conhecimento dos reais objetivos e funções de determinadas profissões, podem desencadear um quadro de frustação ou incapacidade dos estudantes, o que o leva a desistir da formação. Diante disso, observar as características dos alunos, auxilia na elaboração de metodologias a serem aplicadas no ensino-aprendizagem (PAIVA, 2008).

Pinto (2017) faz um questionamento acerca do papel da disciplina Matemática no ensino aprendizagem, especialmente no ensino médio e cita a questão curricular:

> Essa nova configuração, dando destaque à Matemática, nos leva a indagar sobre o papel que essa disciplina escolar representa no desenvolvimento dos jovens. Esse destaque atribuído à Matemática evidencia a necessidade de problematizar o seu ensino e aprendizagem, indagando sobre o porquê da inclusão ou exclusão deste ou daquele conteúdo (PINTO, 2017, p. 1048).

Na verdade, a ânsia do professor é tentar repassar os conteúdos de uma maneira bem fácil e acessível ao aluno, utilizando várias transposições didáticas que não são expostas nos livros didáticos e nem nos livros recomendados aos exames vestibulares. Neste sentido a contribuição de Chevallard (1986) é importante:

> Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1986, p.90).

Andrade (2013) ressalta que as razões pelas quais se ensina matemática e a consequente necessidade de sua aprendizagem deve-se ao fato de esta ser extremamente presente no seu cotidiano. Além disso, inseridos em uma sociedade cada vez mais desenvolvida e competitiva, devemos acrescentar que algumas profissões de destaque geralmente necessitam de conhecimento e raciocínio matemático. No entanto, quando se trata do ensino da matemática, especialmente na Educação Básica, vários são os problemas recorrentes.

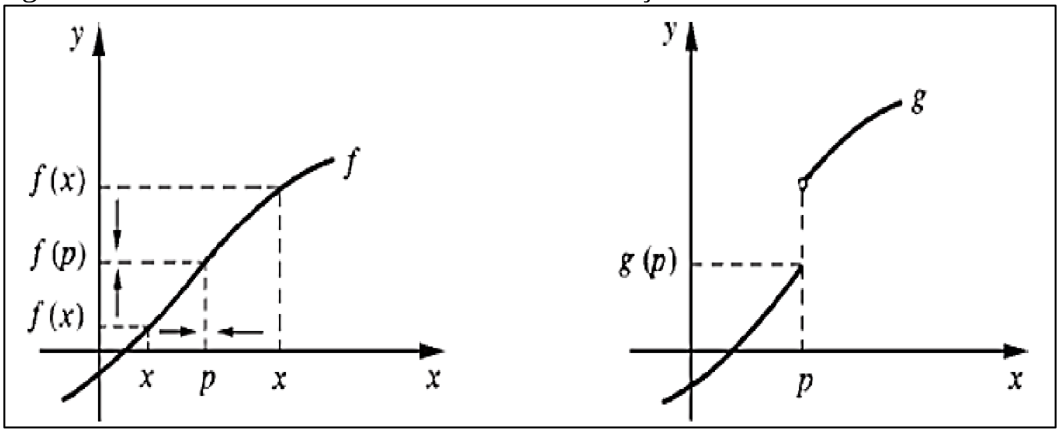
Silva (2005) considera que nesse modelo de ensino, o aluno sendo apenas sujeito passivo em sala de aula, deixa de lado a sua capacidade de análise crítica de determinada situação, dando a ideia de que o que interessa são apenas os cálculos e os procedimentos de rotina. Não significa dizer que exercícios do tipo “calcule” devam ser retirados, uma vez que são essenciais no aprendizado de técnicas de resolução e propriedades. No entanto, promover um ensino de matemática no qual se supervaloriza a memorização e manipulação de fórmulas sem significado no contexto do aluno, e a este sujeito, caber apenas "aceitar" o que é ensinado, sem qualquer possibilidade de questionamento ou reflexão, com certeza não é o melhor caminho para um ensino e aprendizagem de qualidade.

Ao ministrarmos a disciplina de Cálculo I, seguimos geralmente o programa, iniciando por funções, partimos para limites, após esse conteúdo vamos para o ensino de derivadas e finalmente para o cálculo de Integrais.

No transcorrer dos assuntos, há um item, chamado de Regra de L´hospital, em que reduz consideravelmente o cálculo de limites, quando aplicamos essa regra para resolver o problema.

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "salto" em "p" (Guidorizzi, 2013).

Figura 1: Ilustrando a descontinuidade de uma função



Fonte: Guidorizzi (2013, p. 187).

O gráfico de f não apresenta "salto" em p: f é contínua em p. Observe que à medida que x se aproxima de p, quer pela direita ou pela esquerda, os valores f (x) se aproximam de f (p); e quanto mais próximo x estiver de p, mais próximo estará f (x) de f (p). O mesmo não acontece com a função g em p: em p o gráfico de g apresenta "salto", g não é contínua em p.

Segue exemplo:

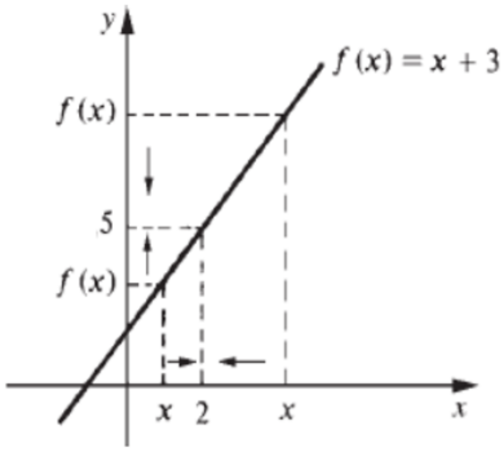
Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule:

$$\lim_{x \to 2} (x + 3)$$

Figura 2: Cálculo intuitivo de limite

x	x+3
3	6
2,5	5,5
2,4	5,4
2,3	5,3
2,2	5,2
2,19	5,19
2,15	5,15
....	.....
2	5

x	x+3
1	4
1,4	4,4
1,5	4,5
1,6	4,6
1,7	4,7
1,8	4,8
1,9	4,9
1,95	4,95
-----	----
2	5



Fonte: autores

METODOLOGIA

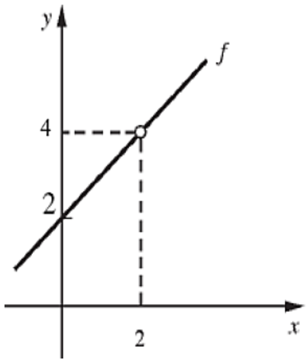
Essa pesquisa é classificada como qualitativa e quantitativa. Optamos por este modelo de investigação por mostrar de forma simples os fatores e aspectos relevantes e atuais da disciplina de Cálculo no meio educacional brasileiro, como também o reflexo no meio científico matemático.

Este trabalho é uma pesquisa diagnóstica e de abordagem (quantitativa), O estudo envolveu uma abordagem quantitativa que usa os métodos quantitativos, Pereira, et al. (2018), foi realizado considerando o período de 02 de abril de 2016 até 20 de junho de 2024 de natureza exploratória.

A dificuldade surge quando observamos a dificuldade em realizar as implicações para sair das indeterminações impostas para termos o resultado esperado. A seguir, temos alguns exemplos da resolução, sem a utilização da regra de L´hospital:

Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule:

(EXEMPLO 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$



A função f não está definida para x = 2.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$f(x) = x + 2, \text{ então:}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2} (x + 2) =$$

$$f(2) = 2 + 2 =$$

$$4$$

Percebemos que para levantarmos a indeterminação $\frac{0}{0}$, foi necessário realizar simplificações algébricas a fim de obtermos o resultado.

Não só esses problemas, mas outros também mais complexos, também colocados a seguir:

Calcule o limite:

(EXEMPLO 2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$, sendo a forma fatorada:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1},$$

portanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} =$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1} + 1} =$$

$$\frac{1}{3}$$

Percebemos que para resolver este exemplo, foi preciso, utilizar de operações mais complexas de fatoração, o que leva mais tempo para resolução e explicações necessárias a resolução.

A Regra de l'Hôspital é assim chamada em homenagem ao nobre francês Marquês de l'Hôspital (1661-1704), mas foi descoberta pelo matemático suíço John Bernoulli (1667-1748). Você pode encontrar algumas vezes l'Hôspital escrito como l'Hôpital, mas ele soletrava seu próprio nome como l'Hôspital, como era comum no século XVII. Veja o Exercício abaixo, que mostra o exemplo o qual o marquês usou para ilustrar sua regra, (STEWART, 2013):

A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi em um livro Analyse des infiniment petits publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro livro de cálculo publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função:

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

Quando x tende a *a*, quando, onde a > 0. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2.

A resolução perpassa pelo conteúdo de derivadas onde é necessário ter conhecimento das regras e propriedades para se desenvolver o problema.

Assim, para resolver o problema proposto, é necessário usar ou a regra da cadeia, para fazer o cálculo e se chegar em um resultado previsto.

Neste caso, utilizamos a propriedade:

$y = u^n$, onde y é a função do numerador ou do denominador. A função "u", é uma das funções presentes no numerador e no denominador.

Para calcularmos a derivada de y, chamamos de y'.

$$y' = n.u^{n-1}.u'.$$

Com base na propriedade acima, temos:

Numerador: $\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}$

Calculando a derivada do numerador, temos:

$$y' = \frac{1}{2}.(2a^3x - x^4)^{\frac{1}{2}-1}.(2a^3 - 4x^3) - \frac{a}{3}(a^2x)^{\frac{1}{3}-1}.a^2 =$$

$$\frac{(2a^3 - 4x^3)}{2\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^3}{3(a^2x)^{\frac{2}{3}}}$$

Calculando também a derivada do denominador:

$$y' = -\frac{1}{4}(ax^3)^{\frac{1}{4}-1}.3ax^2 =$$

$$-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{\frac{3}{4}}}.$$

Agora que calculamos a derivado do numerador e denominador, é só fazer as divisões necessárias.

$$y' = \frac{\frac{(2a^3-4x^3)}{2\sqrt{2a^3x-x^4}} - \frac{a^3}{3(a^2x)^{\frac{2}{3}}}}{-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{\frac{3}{4}}}} =$$

$$\frac{\frac{(a^3 - 2x^3)}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^3}{3(a^2x)^{\frac{2}{3}}}}{-\frac{3ax^2}{4(ax^3)^{\frac{3}{4}}}} =$$

$$\frac{\frac{(a^3 - 2a^3)}{\sqrt{2a^3a - a^4}} - \frac{a^3}{3(a^2.a)^{\frac{2}{3}}}}{-\frac{3a.a^2}{4(a.a^3)^{\frac{3}{4}}}} =$$

$$\frac{\frac{-(a^3)}{\sqrt{a^4}} - \frac{a^3}{3\sqrt[3]{(a^3)^2}}}{-\frac{3a^3}{4\sqrt[4]{(a^4)^3}}} =$$

$$\frac{-\frac{a^3}{a^2} - \frac{a^3}{3a^2}}{-\frac{3a^3}{4.a^3}} = \frac{-a - \frac{a}{3}}{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{4a}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4a}{3} . \frac{4}{3} =$$

$$\frac{16a}{9}$$

L’Hôspital em 1696, conseguiu desenvolver este resultado, após alguns meses de cálculo para se chegar a este resultado, onde não se conhecia as propriedades acima relacionadas e foi realizada a derivação do numerador e do denominador, utilizando-se a definição de derivadas, sem a propriedades, pois na época ainda não se conhecia estes caminhos mais dinâmicos. Falava-se em 15 páginas de trabalho extenso, para se chegar ao resultado demonstrado.

A Regra de l’Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e t antes de usar a Regra de l’Hôspital.

A Regra de l’Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, “x → a ” pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: x → a^+, x → a^- , x → ∞ ou x → $-\infty$.

Quando usamos a regra de l’Hôspital, derivamos o numerador e o denominador separadamente. Nós não usamos a Regra do Quociente. Segue a regra de l’Hospital:

Figura: 3 Regra de l'Hospital

Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.)

Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Fonte: Fonte: STEWART, (2013, p. 272)

A seguir segue a demonstração da regra de l'Hospital, (STEWART, 2013):

Supomos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = L$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \,|\, x \neq a\}$ e

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Do mesmo modo, G é contínua em I. Seja $x \in I$ com $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que e $a < y < x$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui, usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se deixamos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$), portanto

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y\to a^+}\frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to a^+}\frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Portanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso prova a Regra de l'Hôspital para o caso onde a é finito.

Se a é infinito, consideramos $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$, assim temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

A seguir temos alguns exemplos de aplicação:

Figura 3: Aplicação da regra de l'Hospital

Encontre $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

Uma vez que

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

podemos aplicar a Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1.$$

Fonte: STEWART, (2013, p. 275)

A seguir vamos calcular os exemplos anteriores, 1 e 2, utilizando a regra de l'Hospital:

(EXEMPLO 1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

A função f não está definida para x = 2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-4)}{\frac{d}{dx}(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{1} = 2.2 = 4$$

(EXEMPLO 2) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\frac{d}{dx}(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{3}.x^{\frac{1}{3}-1}}{1} =$$

$$\frac{1}{3}\left(1^{-\frac{2}{3}}\right) =$$

$$\frac{1}{3}$$

PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE LIMITES E DERIVADAS

A seguir segue a proposta curricular para o ensino de limites e derivadas, dentro da unidade curricular Cálculo I, que geralmente é ministrada nos cursos de Matemática, Física, Química, Geografia, Engenharias, Economia e outros cursos de mesma grade curricular.

Muitos livros de cálculo já vêm com a proposta já realizada a mais de 10 anos, sem uma mudança na metologia e didática de ensino.

Essa proposta, tem como intenção, melhorar o entendimento da unidade curricular, aos milhares de discentes que todo ano são obrigados a cursar esta disciplina obrigatória em muitas grades curriculares.

Não é necessário se procurar outro livro didático que apresente essa proposta. Basta o professor fazer a adequação na unidade curricular e apresentar os conteúdos nessa ordem proposta de forma a evitar qualquer tipo de dissabores no decorrer da disciplina.

Segue proposta de grade curricular sugerida aos professores que atualmente ministram esta disciplina:

i) Números Reais

a) Conjuntos Numéricos
b) Desigualdades
c) Intervalos
d) Existência de Raízes
e) Potências

ii) Funções

a) Definições
b) Gráficos
c) Funções Pares e Ímpares
d) Funções Injetora, Sobrejetora e Bijertora
e) Função Afim e Quadrática
f) Função Exponencial
g) Funções Trigonométricas
h) Função Inversa

iii) Limites e Continuidade

a) Noções Preliminares de limites
b) Introdução
c) Definição
d) Exemplo usando a definição
e) Exercícios
f) Propriedades dos Limites
g) Exemplos
h) Exercícios
i) Limites laterais
j) Exemplos
k) Exercícios

iV) **Derivadas**

a) Introdução
b) Definição
    b.1) Exemplos

c.1) Definição
c.2) Exemplos
c.3) Exercícios

d) Limites Trigonométricos

d.1) Definição
d.2) Exemplos
d.3) Exercícios

e) Limites no Infinito

e.1) Definição
e.2) Exemplos
e.3) Exercícios

f) Limites Infinitos

f.1) Definição
f.2) Exemplos
f.3) Exercícios

g) Máximos e Mínimos

g.1) Definições
g.2) Exemplos
g.3) Exercícios

h) Funções Crescentes e Decrescentes

h.1) Definições
h.2) Exemplos
h.3) Exercícios

i) Concavidade e Pontos de Inflexão

i.1) Definições
i.2) Exemplos
i.3) Exercícios

j) Gráficos

j.1) Propriedades
j.2) Exemplos
j.3) exercícios

k) Velocidade e Aceleração

k.1) Definições
k.2) Exemplos
k.3) Exercícios

VI) Integral

A utilização dessa proposta permite aos alunos um entendimento mais dinâmico da disciplina, sem dispensar as demonstrações e definições necessárias para se chegar aos resultados esperados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos cálculos mostrados anteriormente, percebemos que a aplicação da regra de l'Hôspital, torna os cálculos muito mais simples e ágil de ser feitos.

Na administração do conteúdo da disciplina de cálculo I, em alguns cursos de licenciatura e engenharia, esse assunto não é abordado, pois as dificuldades são diversas e muitas vezes não conseguimos chegar no conteúdo previsto, e por falta de tempo e cronologia correta do conteúdo, não falamos ao nosso aluno da possibilidade de utilização dessa regra, como sendo uma transposição didática, mais adequada para se trabalhar estes exemplos.

Em muitos cursos de inúmeras universidades, o aluno se sente, de certa forma, tráido. Pois perdeu muito tempo para fazer exercícios que continham exercícios que resolvidos pelo conceito inicial, demoravam muito e apresentavam uma dificuldade muito grande de resolução, estimulando o erro, pelo tamanho e rigor dos cálculos necessários a se chegar ao final, o que sem dúvida se chega a uma pergunta: Por que não se ensinou, a proposta da regra de l'Hôspital, logo após o uso das definições?

A pergunta de alguns jovens que frequentaram a disciplina de Cálculo I, na Unama(Universidade da Amazônia), no ano de 2016, era justamente essa. Já hvia passado avaliações, as notas estavam, muito baixas, pois se exigia o cálculo de limites pelas definições básicas, o que inviabilizava a utilização da Regra de l'Hôspital, que não tinha ainda sido proposta aos alunos.

Em reação ao conhecimento, estes discentes se rebelaram, ao saber que os cálculos que tanto demoravam para fazer e compreender, poderia ser feita utilizando-se essa regra. Alguns estudantes, fizeram até reclamação diretamente a direção da Universidade, como se o professor estivesse de caso pensado em prejudicar os discentes em não ter ensinado antes, tal regra que rapidamente era realizado a resposta, sem qualquer dificuldade.

Diante de tal reclamação, entendemos que, hoje, esses alunos tem motivo em suas reclamaçãoes, principalmente os que cursavam engenharias, uma vez que a habilidade do engenheiro é justamente essa, conhecer métodos que agilizem, facilitem e torne seu cálculo mais exato e confiável.

É preciso sempre ter em mente em facilitar as contas e cálculos, mesmo que seja difícil de explicar, mas o ganho que o aluno terá ao aplicar essa regra será de grande valia ao seu desenvolvimento na graduação.

RFERÊNCIAS

ANDRADE, C. (2013). **O ensino da matemática para o cotidiano**. f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4286/1/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf>. Acesso em: 10 de outubro de 2017.

BARROS, R.M. & MELONI, L.G.P (2006). **O Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por Meio de Metáforas e Recursos Multimídia.** Anais da XXXIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia.

CHEVALLARD, Y. (1986). ***La transposition didactique:*** *du savoir savant au savoir enseigné.* Ed. Colomb Jacques. p. 89-91.

DOMINGUES, H. H. (2003). **Álgebra Moderna**. Volume único. 4ª Edição. São Paulo, Ed. Atual.

DURHAM, E. R. (2003). **O ensino superior no Brasil**: público e privado. Nupes-usp.

GUIDORIZZI, H. L. (2013) UM CURSO DE CÁLCULO, vol. 1 / Hamilton Luiz Guidorizzi. - 5.ed. - Rio de Janeiro: LTC.

IEZZI, G. (2013). **Fundamentos de matemática elementar, 8**: limites, derivadas, noções de integral / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — 7. ed. — São Paulo: Atual.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2018). **Sinopse Estatística da Educação Superior** 2018. Brasília: INEP. 2009. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/basica-censo-escolar-sinopse-sinopse.

JESUS, C. S., LUCAS, J. D. & MAPA, T. F. M. (2011). **Reflexões sobre o ensino de cálculo diferencial e integral I**: UFOP e IFMG-OP numa parceria pela busca da diminuição do índice de reprovação na disciplina. Revista da Educação Matemática da UFOP. 1.

LIMA, I. G. & SAUER, L. Z. (2003). Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de matemática na formação de engenheiros. In: XXI COBENGE, 2003, Rio de Janeiro.

PAIVA, G. S. (2008). Avaliação do desempenho dos estudantes da educação superior: a questão da equidade e obrigatoriedade no Provão e Enade. Ensaio: avaliação em.políticas.públicas. 16, 31-46.

PEREIRA, A. S., et al. (2018). **Metodologia da pesquisa científica**. UFSM

PINTO, A. H. (2017). **A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática**: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. Bolema, (SP), 31(59), 1045-1060.

SECCO, L. C. M.; CABRAL, N. F.; CHAQUIAM, M.; DIAS, G. N. .; PAMPLONA, V. M. S. .; REIS, C. P. dos .; COSTA, E. G. .; PINTO , G. P.(2020). **The teaching of compound interest through didactic sequences.** Research, Society and Development, *[S. l.]*, v. 9, n. 12, p. e17691211068. DOI: 10.33448/rsd-v9i12.11068.

SILVA, J. A. F. (2005). **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: algumas considerações.** Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf>. Acesso em: 17 de outubro de 2017.

STEWART, J. (2013). **Cálculo** volume 1. 7ª. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

WISLAND, B., FREITAS, M. C. D. & ISHIDA, C. T. (2014). **Desempenho acadêmico dos alunos em curso de engenharia e licenciatura na disciplina de cálculo I**. Iberoamerican Journal of Industrial Engineering, Florianópolis, SC, Brasil, 6 (11), 94-112